

## CORRECTION TD - 02

### EXERCICES À MAÎTRISER

#### Ex. n°1 • Échauffement par effet Joule

☆☆☆ 5471

On applique le premier principe au liquide. L'enceinte est calorifugée donc il n'y a pas d'échange de chaleur. La résistance fournit un travail électrique  $W_{Joule} = RI^2 \Delta t$ . Ainsi :

$$\Delta U = n C_{V,m} \Delta T = RI^2 \Delta t \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{n C_{V,m}}{RI^2}}$$

#### Ex. n°2 • Compressions d'un gaz parfait

☆☆☆ 3540

La première transformation est **monotherme** : la température extérieure  $T_0$  reste constante ; et **monobare** : la pression extérieure  $P_0 + Mg/S$  reste constante.

La seconde transformation est **isotherme** : il y a constamment équilibre thermodynamique, donc thermique (la température du gaz reste constante) et mécanique (la pression augmente au fur et à mesure de l'ajout des masses).

Les deux transformations ont en même état final. L'équilibre thermique assure que  $T_f = T_0$ . L'équilibre mécanique assure que :

$$0 = P_f S - P_0 S - Mg \Rightarrow \boxed{P_f = P_0 + \frac{Mg}{S} = P_0 (1 + x)}$$

Enfin, l'équation d'état des gaz parfaits donne :

$$nRT_0 = P_0 V_0 = P_f V_f \Rightarrow \boxed{V_f = \frac{V_0}{1 + x}}$$

Puisque  $U$  est une fonction d'état, sa variation ne dépend pas du chemin suivi par la transformation. Dans les deux cas :

$$\boxed{\Delta U = C_V \Delta T = 0}$$

D'après le premier principe, on a donc :

$$\Delta U = 0 = W + Q \Rightarrow \boxed{Q = -W}$$

Calculons le travail des forces de pression  $W$  pour chaque transformation.

Pour la transformation n°1 (monobare), la pression extérieure est constante  $P_{ext} = cte = P_0 + Mg/S = P_0 (1 + x)$ . On en déduit :

$$\begin{aligned} W_1 &= - \int_{V_0}^{V_f} P_{ext} dV = -P_0 (1 + x) \int_{V_0}^{V_f} dV = -P_0 (1 + x) (V_f - V_0) \\ &= x P_0 V_0 = \boxed{x n R T_0} \end{aligned}$$

Pour la transformation n°2 (isotherme), la pression extérieure est constante égale à la pression du gaz (transformation lente) et la température du gaz est constamment égale à la température extérieure  $T_0$ . On en déduit :

$$\begin{aligned} W_2 &= - \int_{V_0}^{V_f} P_{ext} dV = - \int_{V_0}^{V_f} P dV = - \int_{V_0}^{V_f} \frac{n R T_0}{V} dV \\ &= -n R T_0 \int_{V_0}^{V_f} \frac{dV}{V} = -n R T_0 \ln \left( \frac{V_f}{V_0} \right) = \boxed{n R T_0 \ln(1 + x)} \end{aligned}$$

Remarque : on a toujours  $W_1 > W_2$  puisque  $x > \ln(1 + x)$ .

#### Ex. n°3 • Détente de Joule-Gay-Lussac

☆☆☆ 2744

On considère le système fermé {gaz + vide}. Au cours de la transformation, le système ne reçoit ni travail (parois rigides donc volume constant), ni chaleur (parois calorifugées). Le premier principe assure donc que  $\Delta U_{syst} = 0$ .

Par additivité de l'énergie interne, on a :

$$\Delta U_{syst} = \underbrace{\Delta U_{GP}}_{= C_V \Delta T} + \underbrace{\Delta U_{vide}}_{= 0} = 0$$

On en déduit :  $\boxed{\Delta T = 0}$

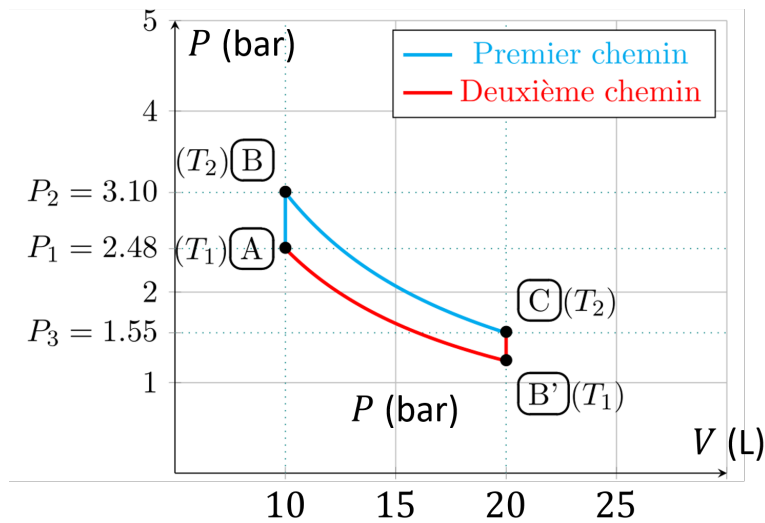
#### Ex. n°4 • Influence du chemin de la transformation

☆☆☆ 1389

1) Par définition :

$$\boxed{C_{V,m} = \frac{R}{\gamma - 1} = 20,8 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}}$$

2) Chemin suivi :



On a :

$$W = W_{AB} + W_{BC} \quad \text{et} \quad Q = Q_{AB} + Q_{BC}$$

Pour une transformation isochore :

$$W_{AB} = 0 \quad \text{car} : \quad dV = 0 \quad \text{et} \quad Q_{AB} = \Delta U_{AB} = C_V (T_2 - T_1) = 1,56 \text{ kJ}$$

Pour une transformation isotherme :

$$W_{BC} = - \int_{V_1}^{V_2} P dV = -nRT_2 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -nRT_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -2,15 \text{ kJ}$$

et,

$$\Delta U_{BC} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{BC} = -W_{BC} = nRT_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 2,15 \text{ kJ}$$

Bilan :

$$\begin{aligned} W &= -nRT_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -2,15 \text{ kJ} \\ Q &= C_V (T_2 - T_1) + nRT_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 3,71 \text{ kJ} \end{aligned}$$

3) Avec le même raisonnement :

$$\begin{aligned} W' &= -nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -1,72 \text{ kJ} \\ Q' &= C_V (T_2 - T_1) + nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 3,28 \text{ kJ} \end{aligned}$$

4) Puisque  $U$  est une fonction d'état :

$$\Delta U = W + Q = W' + Q' = 1,56 \text{ kJ}$$

#### Ex. n°5 • Mélange de gaz parfaits

★★★ 1933

On considère le système fermé  $\{\text{GP1} + \text{GP2}\}$ . Au cours de la transformation, le système ne reçoit ni travail (parois rigides donc volume constant), ni chaleur (parois calorifugées). Le premier principe assure donc que  $\Delta U_{\text{syst}} = 0$ .

Par additivité de l'énergie interne, on a :

$$\Delta U_{\text{syst}} = \Delta U_{\text{GP1}} + \Delta U_{\text{GP2}} = n_1 C_{V,m} (T_f - T_1) + n_2 C_{V,m} (T_f - T_2) = 0$$

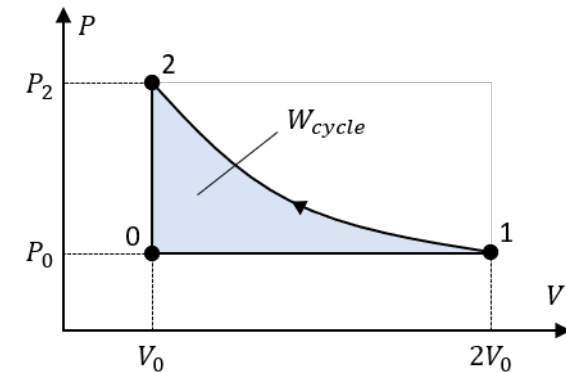
On en déduit :

$$T_f = \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_1 + n_2}$$

#### Ex. n°6 • Cycle de Lenoir

★★★ 7245

1) Cycle :



2) État 0 :

$$V_0 = 14 \text{ L} \quad \text{et} \quad P_0 = 2 \text{ bar} \quad \Rightarrow \quad T_0 = \frac{P_0 V_0}{nR} = 337 \text{ K}$$

État 1 :

$$P_1 = P_0 = 2 \text{ bar} \quad \text{et} \quad V_1 = 2V_0 = 28 \text{ L} \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{P_1 V_1}{nR} = 674 \text{ K}$$

État 2 :

$$V_2 = V_0 = 14 \text{ L} \quad \text{et} \quad T_2 = T_1 = 674 \text{ K} \quad \Rightarrow \quad P_2 = \frac{nRT_2}{V_2} = 4 \text{ bar}$$

3) Transformation  $0 \rightarrow 1$  :

$$W_{01} = - \int_{V_0}^{V_1} P_0 dV = -P_0 V_0 = -2,8 \text{ kJ}$$

$$\Delta U_{01} = \frac{3nR}{2} (T_1 - T_0) = \frac{3P_0 V_0}{2} = 4,2 \text{ kJ}$$

$$Q_{01} = \Delta U_{01} - W_{01} = 7,0 \text{ kJ}$$

Transformation  $1 \rightarrow 2$  :

$$W_{12} = -nRT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = 2P_0 V_0 \ln(2) = 3,9 \text{ kJ}$$

$$\Delta U_{12} = \frac{3nR}{2} (T_2 - T_1) = 0$$

$$Q_{12} = \Delta U_{12} - W_{12} = -3,9 \text{ kJ}$$

Transformation  $2 \rightarrow 0$  :

$$W_{20} = 0$$

$$\Delta U_{20} = \frac{3nR}{2} (T_0 - T_2) = -\frac{3P_0 V_0}{2} = -4,2 \text{ kJ}$$

$$Q_{20} = \Delta U_{20} - W_{20} = -4,2 \text{ kJ}$$

Pour avoir les différentes énergies sur un cycle complet, c'est-à-dire pour une transformation  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 0$ , il suffit de sommer les contributions de chaque transformation.

$$W_{cycle} = P_0 V_0 (2 \ln(2) - 1) = 1,1 \text{ kJ} \quad \text{et} \quad \Delta U_{cycle} = 0$$

4) Le travail est l'aire du cycle.

5) Non. Deux justifications possibles :

○  $W_{cycle} > 0$  donc c'est un récepteur.

○ Le cycle est parcouru dans le sens trigonométrique, donc c'est un cycle récepteur.

POUR ALLER PLUS LOIN

### Ex. n°7 • Échauffement d'un gaz parfait

☆☆☆

8057

1) On applique le PFD sur le piston dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. On se place à l'équilibre et on néglige le poids du piston :

$$0 = -P_0 S + PS \quad \Rightarrow \quad P = P_0 = \frac{nRT_0}{Sh} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{nRT_0}{P_0 S} = 25 \text{ cm}$$

2) C'est une transformation isochore et monotherme.

Travail :  $W = 0$  (car isochore).

Énergie interne (GP diatomique) :  $\Delta U = \frac{5}{2} nR (T_1 - T_0)$ .

D'après le premier principe sur le gaz :  $Q = \frac{5}{2} nR (T_1 - T_0)$ .

3) C'est une transformation isobare.

État final :  $T_1$ ,  $P_1 = P_0$  et donc :  $V_1 = \frac{nRT_1}{P_0}$

Travail :

$$W' = - \int_{V_0}^{V_1} P_0 dV = -nR (T_1 - T_0)$$

D'après le premier principe :

$$\Delta U = W' + Q' = \frac{5}{2} nR (T_1 - T_0) \quad \Rightarrow \quad Q' = \frac{7}{2} nR (T_1 - T_0)$$

### Ex. n°8 • Bien choisir son chemin

☆☆☆

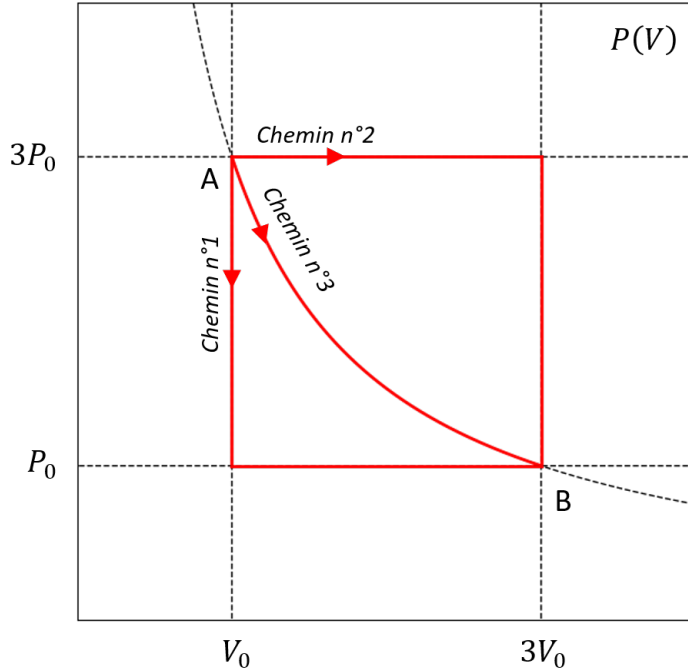
8848

1) La température initiale :

$$T_0 = \frac{3P_0 V_0}{nR}$$

est identique à la température finale (cohérent avec le troisième chemin, isotherme).  
Donc  $\Delta U = 0$ .

2) Dessinons les trois chemins :



Le travail  $W$  (au signe près) représente l'aire sous la courbe. Or,

$$\Delta U = W + Q \Rightarrow Q = -W$$

Donc pour ces trois transformations, la chaleur  $Q$  représente l'aire sous la courbe. C'est donc le chemin n°1 qui minimise la chaleur échangée.

3) L'aire sous la courbe des chemins n°1 et 2 est triviale (l'aire d'un rectangle) :

$$Q_1 = -W_1 = 2P_0V_0 \quad \text{et} \quad Q_2 = -W_2 = 6P_0V_0$$

Pour le chemin n°3 :

$$W_3 = -Q_3 = - \int_{V_0}^{3V_0} P \, dV = -nRT_0 \int_{V_0}^{3V_0} \frac{dV}{V} = -3P_0V_0 \ln(3)$$

1) Équilibre mécanique (PFD) :

$$0 = P_2S - P_1S - mg \Rightarrow P_2 = P_1 + \frac{mg}{S} = 1,062 \text{ bar}$$

La transformation est supposée adiabatique :  $Q_{12} = 0$

Remarque : Attention dans cette question, bien que l'on ait une transformation monobare à  $P_2$ , il n'est pas possible d'utiliser la version enthalpique du premier principe car l'état initial ( $t = 0^+$ ) n'est pas un état équilibre mécanique.

Travail :

$$W_{12} = -P_2(V_2 - V_1) = -nR\left(T_2 - \frac{P_2}{P_1}T_1\right)$$

Énergie interne :

$$\Delta U_{12} = \frac{5}{2}nR(T_2 - T_1)$$

Le premier principe donne :

$$\begin{aligned} \Delta U_{12} = W_{12} &\Rightarrow \frac{5}{2}(T_2 - T_1) = -\left(T_2 - \frac{P_2}{P_1}T_1\right) \\ &\Rightarrow \frac{7}{2}T_2 = \left(\frac{5}{2} + \frac{P_2}{P_1}\right)T_1 \\ &\Rightarrow T_2 = \left(\frac{5}{7} + \frac{2P_2}{7P_1}\right)T_1 = 302 \text{ K} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$V_2 = \frac{nRT_2}{P_2} = 1,93 \text{ L} \quad \text{et} \quad W_{12} = 7,00 \text{ J}$$

2) On a équilibre mécanique et thermique :

$$P_3 = P_2 = 1,062 \text{ bar} \quad \text{et} \quad T_3 = T_1 = 298 \text{ K}$$

$$\text{On en déduit : } V_3 = \frac{nRT_3}{P_3} = 1,91 \text{ L}$$

La transformation est isobare à  $P_2$  et monotherme à  $T_1$ .

Travail :

$$W_{23} = -P_3(V_3 - V_2) = 2,80 \text{ J}$$

Premier principe :

$$Q_{23} = \Delta U_{23} - W_{23} = \frac{7}{2}nR(T_3 - T_2) = -9,81 \text{ J}$$

### Ex. n°10 • Gaz de Van der Waals



5598

1) Par définition :

$$C_{V,m} = \left( \frac{\partial U_m}{\partial T} \right)_V = \eta = cte$$

2) Non. En effet :

$$\Delta U = \eta n \Delta T - n^2 a \Delta \left( \frac{1}{V} \right) = C_V \Delta T - \underbrace{n^2 a \Delta \left( \frac{1}{V} \right)}_{\neq 0}$$

### Ex. n°11 • Bilans énergétiques



0357

1) Soit le système {GP n°1 + GP n°2 + résistor}. Le système ce reçoit ni travail ni chaleur au cours de la transformation. Donc  $W_{fp,syst} = 0$  et  $Q_{syst} = 0$ . Le premier principe + l'additivité de l'énergie interne donnent :

$$\begin{aligned} \Delta U_{syst} &= RI_0^2 \Delta t \\ &= \Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_{syst} \\ &= \frac{3}{2} nR \Delta T_1 + \frac{3}{2} nR \Delta T_2 + C \Delta T_1 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$RI_0^2 \Delta t = \left( \frac{3P_0 V_0}{2T_0} + C \right) \Delta T_1 + \frac{3P_0 V_0}{2T_0} \Delta T_2$$

2) On a donc  $\Delta T_2 = 60$  K. On en déduit :

$$\Delta T_1 = \frac{RI_0^2 \Delta t - \frac{3P_0 V_0}{2T_0} \Delta T_2}{\frac{3P_0 V_0}{2T_0} + C} = 82 \text{ K} \Rightarrow T_1 = 382 \text{ K}$$

3) À l'équilibre mécanique, les pressions  $P_1$  et  $P_2$  sont égales et on a donc :

$$\frac{P}{nR} = cte = \frac{T}{V} \Rightarrow \frac{T_2}{V_2} = \frac{T_1}{V_1}$$

De plus,  $V_1 + V_2 = 2V_0$ . Ainsi,

$$V_1 = \frac{2V_0 T_1}{T_2 + T_1} = 1,03 \text{ L} \quad \text{et} \quad V_2 = \frac{2V_0 T_2}{T_2 + T_1} = 0,97 \text{ L}$$

On obtient pour les pressions :

$$P_1 = P_2 = \frac{nRT_1}{V_1} = 1,24 \text{ bar}$$

4) La capacité thermique du gaz est :

$$C_V = \frac{3}{2} nR = 0,5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

largement inférieure à celle du résistor.

Négliger la capacité thermique du résistor aurait donc conduit à des résultats numériquement très différents.

### Ex. n°12 • Détente d'un gaz sous l'action d'un ressort



2441

Équations d'état des gaz parfait :

$$P_0 V_0 = nRT_0 \quad \text{et} \quad P_f V_f = nRT_f$$

Équilibre mécanique du piston à l'état final :

$$0 = P_f S + k(\ell_f - \ell_0) \Rightarrow P_f = \frac{k}{S} (\ell_0 - \ell_f)$$

On applique le premier principe au système {gaz parfait + piston + vide}. Il y a ni travail, ni chaleur échangée. Il faut prendre en compte la variation d'énergie potentielle élastique.

$$\Delta U + \Delta \mathcal{E}_p = 0 \Rightarrow \frac{nR}{\gamma - 1} (T_f - T_0) + \frac{1}{2} k (\ell_f - \ell_0)^2 = 0$$

Relation volume / longueur du ressort :

$$V_f = V_0 + S(\ell_0 - \ell_f)$$

On a autant d'équations que d'inconnues, on peut se lancer dans l'établissement de

l'équation.

$$\begin{aligned}
& \frac{nR}{\gamma-1} (T_f - T_0) + \frac{1}{2}k (\ell_f - \ell_0)^2 = 0 \\
\Rightarrow & \frac{nR}{\gamma-1} \left( \frac{P_f}{nR} V_f - T_0 \right) + \frac{1}{2}k (\ell_f - \ell_0)^2 = 0 \\
\Rightarrow & \frac{nR}{\gamma-1} \left( \frac{P_f}{nR} V_0 + \frac{P_f}{nR} S (\ell_0 - \ell_f) - T_0 \right) + \frac{1}{2}k (\ell_f - \ell_0)^2 = 0 \\
\Rightarrow & \frac{nR}{\gamma-1} \left( \frac{P_f}{nR} V_0 + \frac{S^2 P_f^2}{knR} - T_0 \right) + \frac{S^2 P_f^2}{2k} = 0 \\
\Rightarrow & \boxed{\frac{(\gamma+1) S^2}{2k} P_f^2 + V_0 P_f - nRT_0 = 0}
\end{aligned}$$

On peut alors en déduire que :

$$P_f = \frac{k}{(\gamma+1) S^2} \left( -V_0 + \sqrt{V_0^2 + \frac{2(\gamma+1) nRT_0 S^2}{k}} \right)$$

Tous les autres paramètres peuvent alors se déduire des relations précédentes.